1. Halmazok, halmazműveletek. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben

Halmazok

A **halmaz** a matematikában nem definiált fogalom. A halmazt alapfogalomnak tekintjük, nem tudjuk egyszerűbb fogalmakkal megmagyarázni, csak körülírjuk, példákkal szemléltetjük. Hasonlóan alapfogalom az **elem** és az a **kapcsolat** is, hogy egy elem eleme egy halmaznak. A halmazt alkotó dolgokat a halmaz elemeinek nevezzük. Ha egy dolog valamely halmazhoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy eleme ennek a halmaznak. Jelölés: $x \in A$ (x eleme az A halmaznak, x az A halmazhoz tartozik), $y \notin A$ (y nem eleme az A halmaznak, y nem tartozik az A halmazhoz). A halmaz elemei lehetnek anyagi dolgok, tárgyak, fogalmak, … stb. Viszont matematikai tanulmányaink során a halmazok elemein leggyakrabban matematikai fogalmakat értünk: számok, pontok, geometriai alakzatok, függvények, stb.

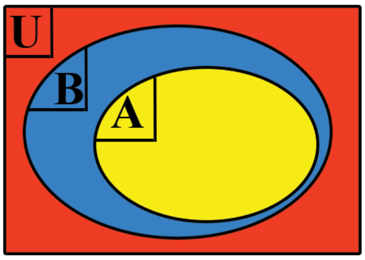
Egy halmazt akkor tekintünk **adott**nak, ha minden dologról egyértelműen eldönthető, hogy eleme ennek a halmaznak vagy nem, a halmazhoz tartozik vagy nem, benne van a halmazban vagy sem.

A halmazokat általában nyomtatott nagybetűvel jelöljük (pl. A, B, C, …, stb.) Egy halmaz megadása az elemeinek egyértelmű meghatározását jelenti. A halmazok megadásakor kapcsos zárójellel jelezzük, hogy halmazról van szó, pl. $A = \{2;4;6;8,10\}$. **Megadhatjuk őket**: elemeik felsorolásával pl. A = {a; b; c; d; e}, vagy egy közös tulajdonsággal pl. B={prímszámok}.

A halmaz **számosságát**, az elemeinek számát abszolútérték-jellel adjuk meg, pl. ha az $A = \{2;4;6;8,10\}$, akkor $|A| = 5$. Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs (azaz 0 elemű halmaz), **üres halmaz**nak nevezzük, jele: Ø, |Ø|=0, pl. ∅ = {10-nél nagyobb páros prímszámok}.

Halmazok vizsgálatakor meg kell adni egy **alaphalmaz**t, amely a vizsgált összes elemet tartalmazza, az ilyen halmazt univerzumnak, vagy alaphalmaznak nevezzük, jele: U.

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlő**nek, ha a két halmaz elemei ugyanazok. Más szóval, A és B halmaz egyenlő, ha $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül és, ha $y \notin A$, akkor $y \notin B$ is igaz.

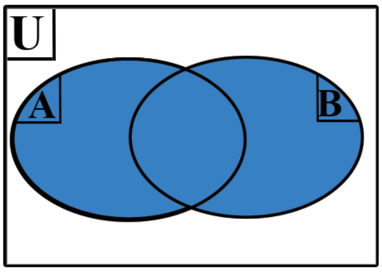


Az A halmazt a B halmaz **részhalmaz**ának nevezzük, ha az B halmaz tartalmazza az A halmaz minden elemét, azaz az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, jele: $A \subseteq B$ (az A halmaz részhalmaza a B halmaznak). A részhalmaz definíciója alapján minden halmaz saját magának is részhalmaza ($A \subseteq A$). Az üres halmaznak egyetlen részhalmaza van: önmaga. Az üres halmaz részhalmaza minden halmaznak ($\emptyset \subseteq H$). Minden nem üres halmaznak legalább két részhalmaza van (triviális részhalmaz): az üres halmaz és önmaga. Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.

Az A halmazt a B halmaz **valódi részhalmaz**ának nevezzük, ha a B halmaz tartalmazza az A halmaz minden elemét és B-nek van legalább egy olyan eleme, amelyik nem eleme az A-nak, azaz az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, de nem egyenlő vele, jele: $A \subset B$ (az A halmaz valódi részhalmaza a B halmaznak).
Röviden: $A \subset B$, ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$. pl. {páros számok} $\subset$ {egész számok}. Egy halmaz önmagának soha nem lehet valódi részhalmaza ($A \not\subset A$). Az üres halmaz minden nem üres halmaznak valódi részhalmaza. Ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$ (tranzitivitás).

Halmazműveletek

1. **Unió**

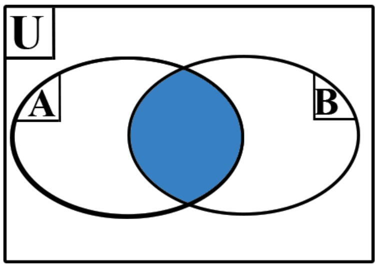


Az A és a B halmazok uniójának (egyesítésének, összegének) nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikbe beletartoznak, amelyek az A-nak vagy a B-nek elemei. Jele: $A \cup B$ (olvasd: „A unió B”).

Ha $A \subseteq B$, akkor $A \cup B = B$.

$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B \,\}$

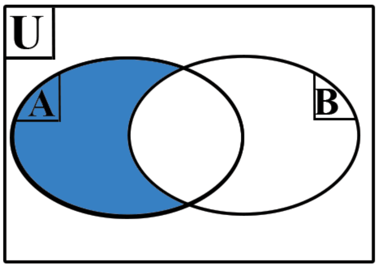
2. Metszet



Az A és a B halmazok metszetének (közös részének, szorzatának) nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek mind a két halmazba beletartoznak, amelyek az A-nak is és a B-nek is elemei. Jele: $A \cap B$, (olvasd: „A metszet B").

Ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap B = A$. $A \cap B = \{ x | x \in A \text{ és } x \in B \}$

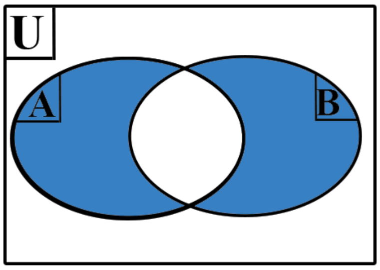
3. Különbség



Az A és a B halmaz (ebben a sorrendben tekintett) különbségének nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek elemei az A halmaznak, de a B halmaznak nem elemei, tehát az A halmazból el kell vennünk azokat az elemeket, amelyek a B halmaznak elemei. Jele: A\B, (olvasd: „A mínusz B").

$A \setminus B = \{ x | x \in A \text{ és } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$

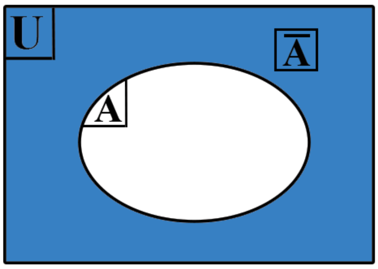
4. Szimmetrikus differencia



Az A és a B halmaz szimmetrikus differencájának (vagy szimmetrikus különbségének) nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek a két halmaz közül pontosan az egyikbe tartoznak bele. Jele: $A \Delta B$ (olvasd: „A delta B").

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, illetve $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

5. Komplementer halmaz



Az A halmaz kiegészítő halmazának (komplementerének) nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek elemei az alaphalmaznak (U), de nem elemei az A halmaznak, azaz U\A, az U alaphalmaz elemeiből kell elvennünk az A halmaz elemeit.

Az A halmaz kiegészítő halmazának jele: $\overline{A}$. $\overline{A} = \{ x | x \in U \text{ és } x \notin A \}$; $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{U} = \emptyset$;

6. Descartes-szorzat

Az A és a B nem üres halmazok Descartes-féle (vagy direkt) szorzatának nevezzük azoknak a rendezett elempároknak a halmazát, amelyeknek az első komponense eleme az A halmaznak, a második komponense pedig eleme a B halmaznak. Röviden: $A \times B = \{(a;b) | a \in A; b \in B\}$, (olvasd: „A kereszt B”).

Az elempárok rendezettsége azt jelenti, hogy az elempárokban az elemek sorrendje nem felcserélhető. Például: $(2;3) \neq (3;2)$.

Ha az A halmaz elemeinek száma $|A| = n$ és a B halmaz elemeinek száma $|B| = m$, akkor a direkt szorzatuk számossága $|A \times B| = n \cdot m$. Például, ha $A = \{1; 2\}$ és $B = \{a; b; c\}$, akkor $A \times B = \{(1;a),(1;b),(1;c),(2;a),(2;b),(2;c)\}$ és $B \times A = \{(a;1),(a;2),(b;1),(b;2),(c;1),(c;2)\}$, azaz $|A| = 2$ és $|B| = 3$, akkor $|A \times B| = 2 \cdot 3 = 6$ és $|B \times A| = 3 \cdot 2 = 6$.

A Descartes-féle (sík) koordinátarendszerben ilyen rendezett elempárok alkotják a pontok koordinátáit.

Halmazműveleti tulajdonságok

1. Idempotencia („önmagával azonosság”),

Egy tetszőleges halmaz önmagával való metszetének, illetve uniójának eredménye önmaga a halmaz.

$$A \cap A = A; \; A \cup A = A$$

2. Kommutativitás („felcserélhetőség”)

Egy tetszőleges A és B halmaz metszetében, uniójában, illetve szimmetrikus különbségében (differencia) a két halmaz felcserélhető.

$$A \cap B = B \cap A; \; A \cup B = B \cup A; \; A \Delta B = B \Delta A$$

3. Asszociativitás („átzárójelezhetőség”)

Egy tetszőleges A, B és C halmaz metszete, uniója, illetve szimmetrikus különbsége (differencia) tetszőlegesen zárójelezhető, a zárójel el is hagyható.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) = A \Delta B \Delta C$$

4. **Disztributivitás („szétosztás”)**

   Tetszőleges A, B és C halmazra

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C);$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);\ (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);\ (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C);\ (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

5. **Abszorpciós (elnyelési, beolvasztási) szabály**

$$A \cup A = A;\ A \cap A = A;\ A \setminus A = \emptyset;$$

$$A \cup \emptyset = A;\ A \cap \emptyset = \emptyset;\ A \setminus \emptyset = A;\ \emptyset \setminus A = \emptyset;$$

$$A \cup U = U;\ A \cap U = A;\ A \setminus U = \emptyset;\ U \setminus A = \overline{A};$$

$$A \cup \overline{A} = U;\ A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

6. **De Morgan-azonosságok**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B};\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

   ha $A \subset B$, akkor $A \cup B = B$ és $A \cap B = A$;

   ha $A \cap B = \emptyset$ (ún. diszjunkt halmazok), akkor $A \setminus B = A$ és $B \setminus A = B$;

   ha $A = B$, akkor és csak akkor $A \setminus B = B \setminus A$;

   ha $A = B$, akkor és csak akkor $A \times B = B \times A$.

Nevezetes ponthalmazok a síkban

A pont, az egyenes, a sík, a tér, továbbá az illeszkedés a geometria alapfogalmai közé tartoznak, ezeket nem definiáljuk. Ezeken az alapfogalmakon kívül azonban olyan igaznak elfogadott alaptételekre is szükség van, amelyeket nem lehet más, egyszerűbb tételekre visszavezetni. Ezeket az alaptételeket **axiómák**nak nevezzük. Ilyen axióma pl. Bármely két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, amely ezeket a pontokat tartalmazza. Egy ponton át csak olyan egyenes halad, amely a ponton át nem haladó egyenessel párhuzamos. stb.

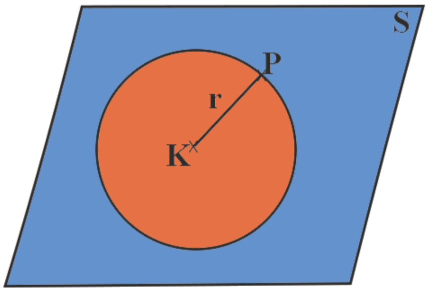
Egy egyenesnek két pontja közötti részét **szakasz**nak nevezzük. A két pontot a szakaszhoz tartozónak tekintjük, ezeket a szakasz végpontjainak nevezzük.

Egy e egyenesre illeszkedő A pont az egyenest két **félegyenes**re bontja. Ekkor mindkét félegyeneshez hozzászámítjuk az A pontot.

Egy adott pontból kiinduló két félegyenes a rájuk illeszkedő síkot két részre bontja. Egy-egy ilyen síkrészt szögtartománynak, vagy röviden **szög**nek nevezzük.

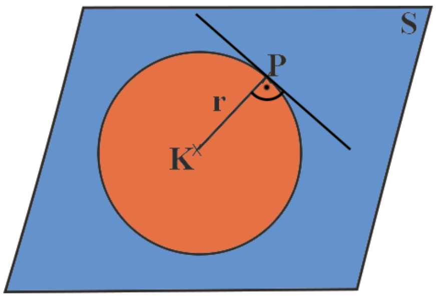
Ha a síkban egy félegyenest a kezdőpontja körül valamilyen irányban elforgatunk, akkor a félegyenes kezdő- és véghelyzete mint szárak által meghatározott szöget, **forgásszög**nek nevezzük.

Azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek az S sík egy K pontjától adott r távolságra vannak, egy **körvonal**. Az adott K pont a kör középpontja, az adott r távolság pedig a sugara.

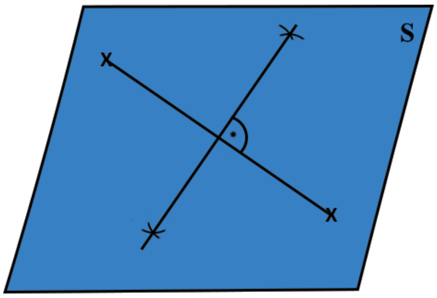


Azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek az S sík egy K pontjától adott r ($r \neq 0$) távolságnál nem nagyobb távolságra vannak, egy **körlap**.

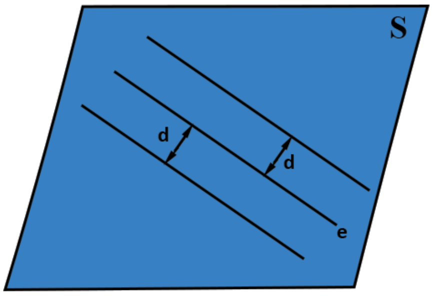
A kör **érintő**je olyan egyenes, amely a kör síkjában van és a körrel pontosan egy közös pontja van. A kör érintője merőleges az érintési pontjához húzott sugárra.



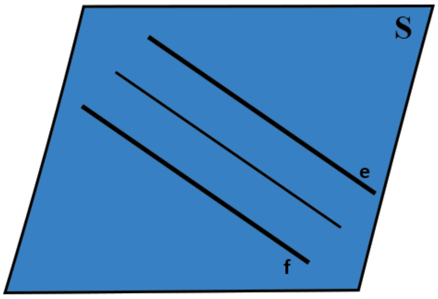
A sík két pontjától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két pont által meghatározott **szakasz felezőmerőlegese**.



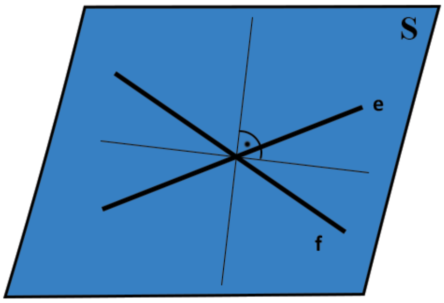
Azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík egy e egyenesétől adott d távolságra vannak, két olyan **párhuzamos egyenes**, amelyeknek az adott egyenestől való távolsága az adott távolsággal egyenlő.



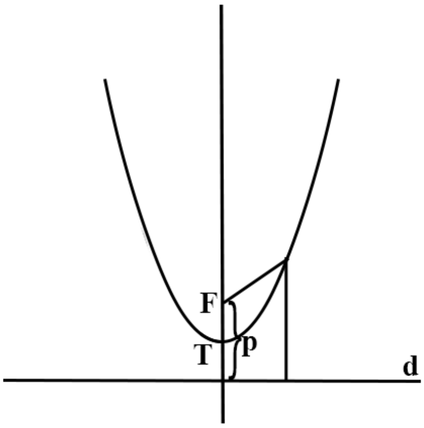
Azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík két párhuzamos (e és f) egyenesétől egyenlő távolságra vannak, a két egyenes **középpárhuzamos**a, egy velük párhuzamos, közöttük a távolságuk felében futó egyenes.



Azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík két metsző (e és f) egyenesétől egyenlő távolságra vannak, az adott egyenesek szögfelezői. A két szögfelelő egymásra merőleges egyenesek.

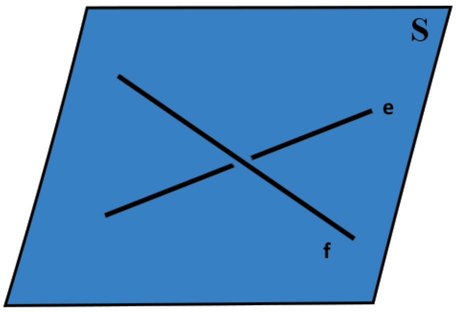


Azoknak a síkbeli pontoknak a halmazát, amelyek a sík egy megadott egyenesétől és egy, az egyenesre nem illeszkedő adott pontjától egyenlő távolságra vannak, parabolának nevezzük. A megadott egyenes a vezéregyenes (vagy direktrix), jele: d; az adott pont a fókuszpont (vagy gyújtópont), jele: F; a fókuszpont és a vezéregyenes távolsága a paraméter, jele: p; a fókuszpontból a vezéregyenesre bocsátott merőleges, amely a parabola szimmetriatengelye, a parabola tengelye; a parabola tengelyre illeszkedő pontja a csúcspont vagy tengelypont, jele: T.

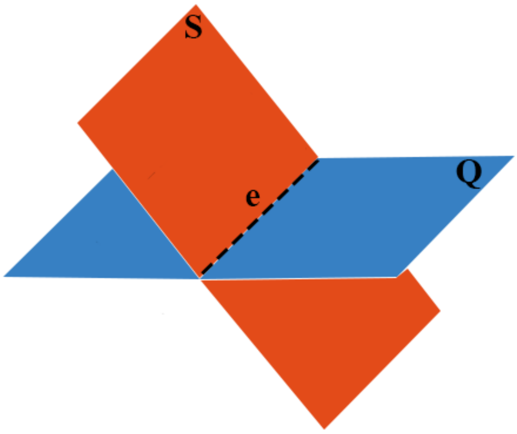


Nevezetes ponthalmazok a térben

Két egyenes **kitérő**, ha nincsenek egy síkban. A kitérő egyeneseket az alábbi ábrán látható módon szokás szemléltetni.

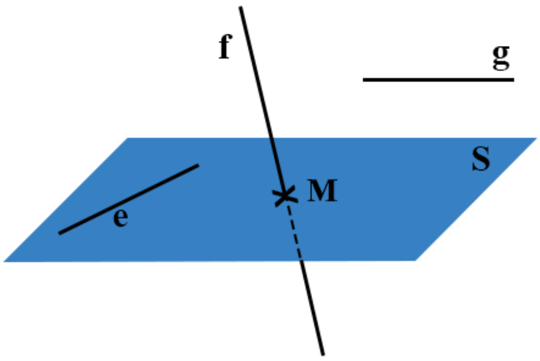


Két sík **metsző**, ha pontosan egy közös egyenesük van, $S \cap Q = e$.

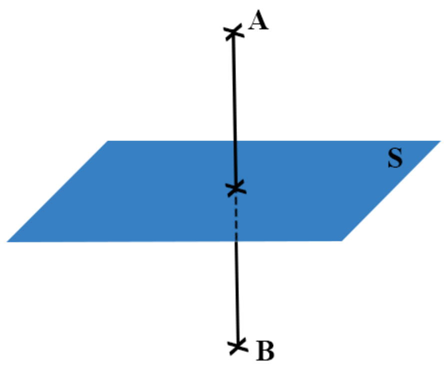


Két sík **párhuzamos**, ha nem metszik egymást, $S \cap Q = \emptyset$.

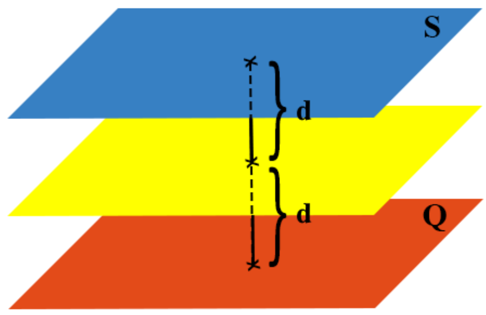
Egy egyenes vagy **illeszkedik** a síkra ($e \in S$), vagy a síkot egy pontban **metszi** ($f \cap S = M$), vagy nincs a síkkal közös pontja ($g \cap S = \emptyset$), ekkor az egyenes és a sík **párhuzamos**ak.



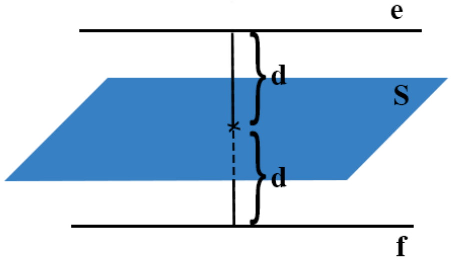
Azoknak a térbeli pontoknak a halmaza, amelyek egy AB szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak, a **szakasz felező merőleges síkja**.



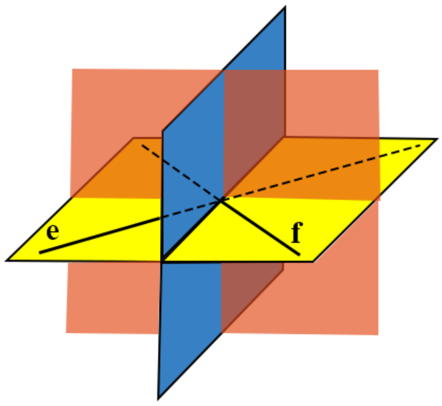
Azoknak a térbeli pontoknak a halmaza, amelyek az S és Q párhuzamos síkoktól egyenlő (d) távolságra vannak, egy olyan sík, amely **párhuzamos** az adott két síkkal és tőlük egyenlő távolságra van.



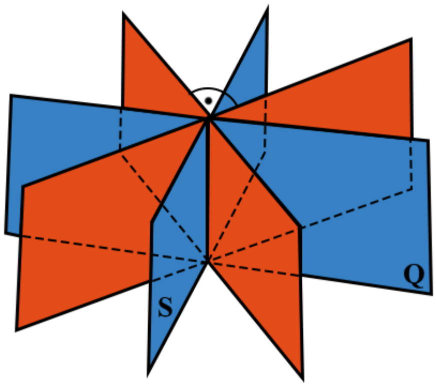
Azoknak a térbeli pontoknak a halmaza, amelyek az e és f párhuzamos egyenesektől egyenlő (d) távolságra vannak, egy olyan velük **párhuzamos sík**, amely a két egyenestől egyenlő távolságra van.



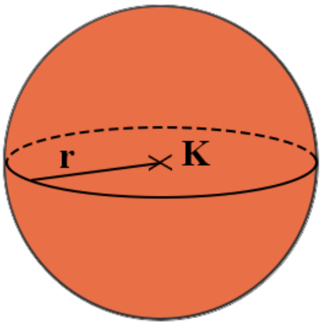
Azoknak a térbeli pontoknak a halmaza, amelyek e és f metsző egyenesektől egyenlő távolságra vannak, két sík, az adott **két egyenes szögfelező síkja**i. A két szögfelező sík merőleges a két egyenes síkjára, valamint egymásra is merőlegesek.



Azoknak a térbeli pontoknak a halmaza, amelyek az S és Q metsző síkoktól egyenlő távolságra vannak, két sík, amelyek az adott két sík szögfelező síkjai. A két szögfelező sík merőleges egymásra.

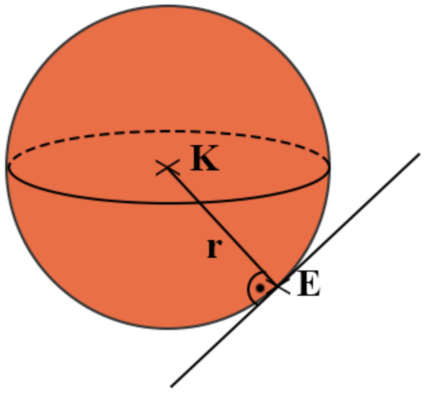


Azoknak a térbeli pontoknak a halmaza, amelyek egy adott K ponttól megadott r távolságra vannak, egy **gömbfelület**. Az adott K pont a gömbfelület középpontja, a megadott r távolság a sugara.

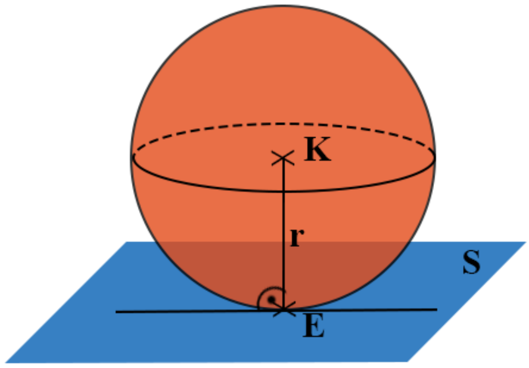


Azoknak a térbeli pontoknak a halmaza, amelyek egy adott K ponttól megadott r távolságnál nem nagyobb távolságra vannak, egy **gömbtest**. Az adott K pont a gömbtest középpontja, a megadott r távolság a sugara.

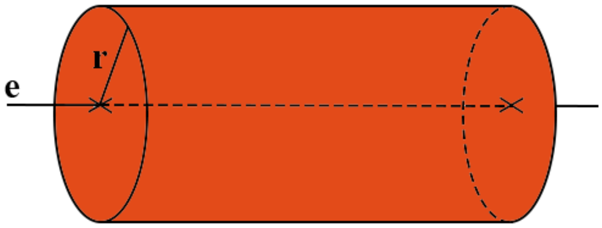
A gömb érintőegyenese olyan egyenes, amelynek a gömbfelülettel pontosan egy közös pontja van. A gömb érintőegyenese merőleges az érintési pontba húzott gömbsugárra.



A gömb érintősíkja olyan sík, amelynek a gömbfelülettel pontosan egy közös pontja van. A gömb érintősíkja merőleges az érintési ponthoz húzott gömbsugárra.



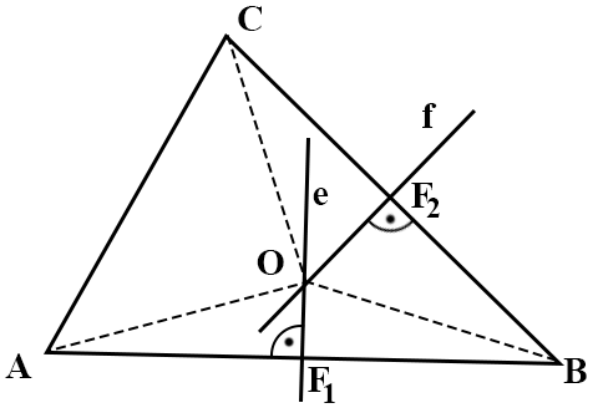
Azoknak a térbeli pontoknak a halmaza, amelyek egy e egyenestől megadott r távolságra vannak, egy olyan hengerfelület, amelynek a megadott e egyenes a tengelye, az adott r távolság pedig a sugara.



Alkalmazások nevezetes ponthalmazokra

Tétel: Bármely háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a pont a **háromszög köré írható kör középpontja**.

Bizonyítás: Jelöljük az ABC háromszög AB oldalának felezőmerőlegesét e-vel, BC oldalának felezőmerőlegesét f-fel. Mivel az ABC háromszög AB és BC oldalai nem párhuzamosak, így a felezőmerőlegesek sem lehetnek párhuzamosak egymással. Az e és az f egyenesek tehát egy (O pontban) metszik egymást.



Az AB oldal felezőmerőlegesének, az e egyenesnek minden pontja egyenlő távolságra van az A és a B ponttól. A BC oldal felezőmerőlegesének, az f egyenesnek minden pontja egyenlő távolságra van a B és a C ponttól.

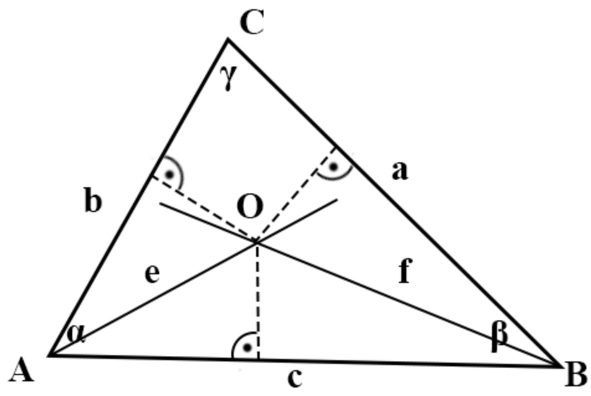
Mivel $O \in e$, ezért $OA = OB$, illetve $O \in f$, ezért $OB = OC$. A két egyenlőségből következik, hogy $OA = OC$, vagyis az O pont egyenlő távolságra van az AC oldal végpontjaitól is. Tehát az O pont rajta van az AC oldal felezőmerőleges egyenesén, azaz a háromszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a pont egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom csúcsától, ezért ez a pont a háromszög köré írható kör középpontja.

Ha a háromszög hegyesszögű, akkor ez az O pont a háromszög belső pontja. Ha a háromszög derékszögű, akkor az O pont az átfogó felezőpontja. Ha a háromszög tompaszögű, akkor az O pont a háromszögön kívülre esik.

Tétel: Bármely háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont a **háromszögbe írható kör középpontja**.

Bizonyítás: Jelöljük az ABC háromszögben az α (A csúcsnál lévő) szög szögfelezőjét e-vel, a β (B csúcsnál lévő) szög szögfelezőjét f-fel. Az e egyenes minden pontja egyenlő távolságra van a b és c oldalaktól. Az f egyenes minden pontja egyenlő távolságra van az a és a c oldalaktól.

Mivel az ABC háromszögben az α és a β is 180°-nál kisebb, így a felezőik az AB oldallal hegyesszöget zárnak be. Az e és az f egyenesek tehát egy (O pontban) metszik egymást.



Mivel $O \in e$, ezért $Ob = Oc$, illetve $O \in f$, ezért $Oa = Ob$, vagyis az O pont egyenlő távolságra van a γ szög száraitól is. Tehát az O pont rajta van a γ (C csúcsnál lévő) szög szögfelező egyenesén, azaz a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom oldalától, ezért ez a pont a háromszögbe írható kör középpontja. A belső szögfelezők metszéspontja mindig a háromszög belsejében van.

Alkalmazások, történeti vonatkozások

Biológiában a rendszertan, kémiában a periódusos rendszerbeli csoportosítás is halmazelméleti fogalmak. Műveletek: melyik csoport melyiknek részhalmaza?

A függvényekkel kapcsolatban is használjuk a halmazokat (értelmezési tartomány, értékkészlet).

Egyenletek értelmezési tartományának vizsgálatakor számhalmazok metszetét képezzük.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete, tengelyes tükrözés, síkra való tükrözés, háromszögek hozzáírt körei, síkidomok alkotórészeinek, kerületének, területének kiszámítása, testek alkotórészeinek, felszínének, térfogatának kiszámítása, vektorok.

Bernard Bolzano 1851-ben megjelent *Paradoxien des Unendlichen* című könyvét halála után három évvel adta ki egy tanítványa. Itt jelent meg először a halmaz szó (Menge), és ebben sikerült Bolzanonak olyan halmazokra példát adni, amelyek kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek valamely valódi részhalmazukkal. "Halmazelmélete" eredményeit annyira paradoxnak érezte – az Euklidész-féle részről és egészről szóló axióma megsértése miatt – hogy végül elvetésük mellett döntött. Könyvét pedig nem adta ki.

A 19. század vége felé két matematikus, Richard Dedekind és Georg Cantor magán a fogalmak szigorúbb definícióján túlmutató jelentőségű eredményeket ért el a halmazelméletben. Richard Dedekind bebizonyította, hogy a racionális és irracionális számok mindenhol sűrűn helyezkednek el a valós számok között. Georg Cantor pedig azt bizonyította be, hogy a valós számok halmaza nem lehet megszámlálhatóan végtelen. Ennek a cikknek az 1874-es publikálását tekintjük a halmazelmélet megszületésének. A 20. század elején Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel, Neumann János és Kurt Gödel munkássága révén sikerült axiomatikus alapokra hozni a halmazelméletet, melyek nagyban hozzájárultak a modern halmazelméleti kutatások eredményességéhez.